

1^ο Μαθημα

7/10/2019

Ιστοσελίδα μαθηματος: users.uoi.gr/abatsidis/532.htm

Διδακτικό Έργο ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ

4 ΣΥΓΓΡΑ

1. ΚΑΚΟΥΛΛΟΣ (κεφ 2-4)
2. ΔΑΡΑΣ (κεφ. 3-5)
3. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ (κεφ. 1-5)
4. ΑΡΤΙΚΗΣ (κεφ 1-3)

Γραφείο 309χ

Ώρες γραφείου: 8.05 - 2.40 (καποιες φορές όμως έχει μαθημα)

Τηλέφωνο: 2651008232

e-mail: abatsidis@uoi.gr

Ιστορικά Στοιχεία:

Αφορμή για την ανάπτυξη των Σ.Δ. υπήρξε ένα φαινόμενο από το χώρο της φυσικής, ο Brown το 1827 παρατήρησε την τυχαία-ατακτική κίνηση ενός βιωματίδιου όταν αυτό βρίσκεται βευσρό ή βε αέριο. Έπειτα το φαινόμενο μελετήθηκε από τον Einstein το 1905 αλλά αυτός πα τελειοποίησε το έργο ήταν ο Wiener το 1923. Αρα κάνω λόγο για κίνηση Brown ή Wiener

Με τι ασχολούνται οι Σ.Δ.?

Οι Σ.Δ. ασχολούνται με την μελέτη και την ανάλυση τυχαίων (στοχαστικών) και δυναμικών βιωματίων ή φαινομένων

Τυχαίο: λέμε ένα φαινόμενο κατά το οποίο έχουμε αβέβαια εκβαση (αλλά εκβαση για από δυνατές)

Δυναμικό: λέμε το φαινόμενο εκείνο το οποίο εξελίσσεται στο χρόνο.

π.χ. πόσοι φοιτητές είναι στην αίθουσα

πόσοι επίσκεπτες μπαίνουν σε μια βελίδα.

Ορισμός: Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t: t \in T\}$ όπου t είναι μια παράμετρος ενός μη διατεταγμένου μη κενού συνόλου T , ορισμένων σε ένα χώρο πιθανοτήτων (Ω, \mathcal{F}, P)

Χώρος πιθανοτήτων: $\Omega \sim$ δειγματικός χώρος.

$\mathcal{F} \rightarrow \sigma$ -άλγεβρα ($A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$)

$\Omega \in \mathcal{F}$

A_1, A_2, \dots, A_n τότε $\cup A_i \in \mathcal{F}$)

$P \sim$ μέτρο πιθανότητας $P(\Omega) = 1$

Παρατήρηση 1: Η παράμετρος t μεταβάλλεται, παίρνει ειμές είτε σε ένα διαστήμα είτε παίρνει συκεκρίμενες ειμές.

τι X_t

$\rightarrow T$ διαστήμα

• $X(t)$ η στοχ. διαδ. που παρέρτα αριθμό χρηστών καθόλη τη διάρκεια εργαζόμενων ώρων. πόσοι είναι συνδεδεμένοι στο διαδίκτυο στην ιστοσελίδα του πανεπιστημίου. στις $(8^{\circ\circ}, 16^{\circ\circ})$ (συνέχεια)

$X(t)$ η στοχ. διαδ. που παρέρτα αριθμό χρηστών στις $8^{\circ\circ}, 12^{\circ\circ}, 16^{\circ\circ}$ $\rightarrow T = \{t_1, t_2, t_3\}$

Στην περίπτωση που η παράμετρος t μεταβάλλεται
 σε ένα διάστημα λέμε ότι έχουμε Σ.Δ. σε συνεχή
 χρόνο. Ενώ στην περίπτωση που παίρνει διακριτές Σ.
 είμες λέμε ότι είναι Σ.Δ. σε διακριτό χρόνο.
 Πολλές φορές για να μην υπάρχει σύγχυση, συμβ.
 με $X(t)$ την Σ.Δ. σε συνεχή χρόνο και με X_n
 τη Σ.Δ. σε διακριτό χρόνο.

Χώρος καταστάσεων μιας στοχ. διαδ. είναι το σύνολο
 των δυνατών εγγιών της.

Παρατηρήσι: Ο χώρος των καταστάσεων μπορεί να
 είναι συνεχής ή διακριτός.

Με συνεχή χώρο καταστάσεων (S)

Με διακριτό χώρο καταστάσεων.

συνεχή χρόνο	διακριτό χρόνο
διακριτό χώρο	διακριτό χώρο.
συνεχή χρόνο	διακριτό χρόνο
συνεχή χώρο	συνεχή χώρο.

4 περιπτώσεις

Τι σημαίνει $P(X_{200} = 2)$

X_{200} μελετώ τη β.δ. τη χρον. στιγμή 200. να βρεθεί
 βελ κατάσταση 2 δηλ. να πάρει την εγγι 2.
 π.χ. για τις λαμπές. 0 = ΚΑΛΗ

1 = ΚΑΚΗ

2 = ΜΕΤΡΙΑ.

Παραδειγμα 1. (Μελέτη πληθυσμού)

$x(t)$: αριθμός μελών ενός πληθυσμού τη χρονική στιγμή με αρχικό μέγεθος $x(0)$.

$$x(t) = \max \left\{ 0, x(0) + \int_0^t \Gamma(\sigma, \tau) - \Pi(\sigma, \tau) d\sigma \right\}$$

αριθμός γεννήσεων στο (σ, τ)

αριθμοί θανάτων στο διάστημα (σ, τ) .

Παραδειγμα 2. (Οικολογικές ανεικαραθέςες)

Έστω A, B δύο εχθρικοί πληθυσμοί ζών στο ίδιο περιβάλλον.

A τραινώνεται με B .

$$\left. \begin{aligned} P(\text{να σκοτωθεί ο } B) &= p \\ P(\text{να σκοτωθεί ο } A) &= q \end{aligned} \right\} p + q = 1$$

Κάθε φορά μαλώνει ένα μέλος του A με ένα μέλος του B .

X_n η β.δ. που περιγράφει τον αριθμό μελών του πληθυσμού A μετά τη n -οστή μάχη.

Έχω διακριτό χρόνο μαζί μετρώ σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές (μετά από κάθε τραινωμο).

Έχω διακριτό χώρο δηλ. το πλήθος των μελών του A είναι διακριτό

Αν ξέρω ότι $X_n = z \neq 0$ τότε $X_{n+1} = ?$

$$X_{n+1} = X_n + \Gamma(n, n+1) - \Pi(n, n+1) + Z_n$$

$$\text{όπου } Z_n = \begin{cases} 0, & \text{αν κερδίσε ο } A \\ 1, & \text{αν έχασε ο } A \end{cases}$$

Ορισμός: Μια ΣΔ ονομάζεται Μαρκοβιανή αν δοθείς τις καταστάσεις της εν χρόν. στιγμή t (παρόν) η κατάσταση της τη χρονική στιγμή $s > t$ (μέλλον) δεν εξαρτάται από τις χρον. βεγμεί $u < t \neq u$.

$$P(a < X_t < b \mid \underbrace{X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_k} = x_k}_{\text{παρελθόν}})$$

με $t_1 < t_2 < \dots < t_k < t$ (παρόν)

$$P(a < X_t < b \mid X_{t_k} = x_k)$$

Ορισμός: Μια ΣΔ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο λέγεται ετοχαβτική αλυσίδα.

Ορισμός: Αν μια ετοχ. αλυσίδα έχει επιπλέον την Μαρκοβιανή ιδιότητα λέμε ότι είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα.

$$P(X_u = j \mid X_0 = x_0, \dots, X_{u-1} = i) = P(X_u = j \mid X_{u-1} = i).$$

$$P(X_u = j \mid X_{u-1} = i) = p_{ij} \quad (u=1, \dots, n).$$

πιθανότητα μεταβάσει από την κατάσταση στην οποία βρίσκονται τη χρον. στιγμή $u-1$ στην κατάσταση j τη χρον. στιγμή u .

Ορισμός: Όταν οι πιθαν. μεταβάσει είναι ανεξάρτητες από τη χρον. στιγμή πραγματοποιείβει βιλ. το n τότε λέμε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι βραβική η ομογενής.

Ορισμός: Πίνακας πιθανοεπιτην μεταβάσει ενός βιματος είναι ένας πίνακας με στοιχεία σε κάθε γραμμή τη μεταβάσει

j-στήλη.

i-γραφή

Πιθ. μεταβολής από
το i → j

$$P = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

P_{ij}

$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \text{ΚΑΛΗ} \\ 1 = \text{ΚΑΚΗ} \\ 2 = \text{ΜΕΤΡΙΑ} \end{array} \right\}$

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

είναι πιθανότητες
αρα > 0
και < 1

Επίσης το άθροισμα των πιθανοτήτων κάθε γραμμής είναι ίσο με 1.